TEMA n. 2.

Esercizio 1. Una grossa università divide gli studenti all'ingresso in due fasce. Nella fascia A, di eccellenza, ci sono gli studenti che sono esentati dalle tasse, mentre nella fascia B ci sono gli studenti rimanenti, che pagano la rata con cadenza trimestrale, per tutti di uguale importo di 1000 Euro. Ogni tre mesi una percentuale di studenti di fascia B pari a q (con $0 < q < \frac{1}{2}$) viene promossa in fascia A, mentre una percentuale di studenti di fascia A pari a p (con $0 < p < \frac{1}{2}$) viene retrocessa in fascia B.

Il Rettore osserva che il gruppo di studenti entrati l'anno scorso ha versato ogni tre mesi importi complessivi sempre più bassi. Il Dipartimento di Matematica gli comunica che l'importo complessivo versato da quegli studenti non si avvicina a zero ma rimarrà sempre maggiore o uguale di una soglia a cui tende.

(i) Se a, b sono il numero di studenti in ingresso l'anno scorso per ogni fascia, come calcolare la soglia?

(ii) Provare che la successione data dal numero di studenti di fascia A, contati ogni tre mesi, è monotona.

(iii) Oggi il numero di studenti di ciascuna fascia è dato rispettivamente da a_0 e b_0. Il Rettore deve aumentare le entrate ma non vuole aumentare l'importo della rata, e decide quindi di variare i parametri p e q. Qual'è la condizione che devono soddisfare p e q perché l'introito cominci a risalire?

Esercizio 2. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata $n \times n$ di rango uno, a coefficienti reali.

(i) Provare che esistono $(v_1, \dots v_n)$ e $(w_1, \dots w_n)$ tali che $a_{ij} = v_i w_j$.

(ii) Provare che $A^i = (trA)^{i-1}A$ per ogni $i \geq 1$.

(iii) Provare che A è diagonalizzabile se e solo se $trA \neq 0$.

Esercizio 3. (i) Sia Σ un insieme di enunciati contenenti

a) $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$ e

b) $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z)$

Dimostrare che se Σ ha un modello infinito allora ha un modello che contiene una catena discendente infinita.

(ii) Dimostrare in un sistema formale con uguaglianza che se R è una relazione simmetrica, transitiva e tale che per ogni x esiste y tale che xRy allora R è riflessiva.

(iii) Dimostrare che il seguente enunciato è equivalente all'assioma della scelta:.

Se f è una applicazione suriettiva da X su Y, allora esiste una applicazione $g : Y \to X$ tale che $f \circ g$ è l'identità su Y.

Esercizio 4. Dato n un naturale maggiore o uguale a 2, sia $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti in $\mathbb{Z}$. Per ogni $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1, 0\}$ si definisca l'insieme $N_k = \{(a_{ij}) \in G \mid a_{ii} \equiv 1 \pmod{k} \quad \forall\, i = 1, \dots n, \quad a_{ij} \equiv 0 \pmod{k} \quad \forall\, i \neq j\}$.

1. Provare che N_k è un sottogruppo normale di G.
2. Provare che G/N_k è un gruppo finito.
3. Posto $\mathcal{F} = \{N \triangleleft G \mid G/N \text{ è finito}\}$, dimostrare che $\bigcap_{N \in \mathcal{F}} N = 1$.
4. Siano $g \in G$ ed $m \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni k, l'elemento gN_k ha ordine al più m in G/N_k. Provare che g ha ordine al più m.

Esercizio 5. Si consideri il campo con 8 elementi nella rappresentazione

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1).$$

Poniamo $\alpha = x + (x^3 + x + 1)$ e consideriamo una indeterminata y su $\mathbb{F}$. Sia $a = \alpha y + 1$. Si dica se $a + (y^2 + 1)$ è invertibile nell'anello $\mathbb{F}[y]/(y^2 + 1)$ e, in caso lo sia, trovarne l'inverso. Esibire due elementi $u, v \in \mathbb{F}[y]/(y^2 + 1)$ non nulli e tali che $uv = 0$.

Esercizio 6. (a) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (1 + |x|^2)^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^n$, è in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Dimostrare che $f(x) = P_k(x)e^{-|x|^2}$ è in $L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni polinomio P_k di n–variabili reali e di grado $k \geq 0$.

(c) Dire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f(x) = |x|^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, è in $L^1(B_R)$, ove B_R è la palla di $\mathbb{R}^n$ centrata in 0 e di raggio $R > 0$.

(d) Sia $n \mapsto f_n = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n^a]}$, con $1 \leq p < a < q$. Dimostrare che $f_n \to 0$ per $n \to \infty$ in $L^q(\mathbb{R})$, ma non in norma $L^p(\mathbb{R})$.

Esercizio 7. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\log \frac{n^2+1}{n^2-n}\right) \sin nx$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right] \cos nx$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)(\sin nx + \cos nx)$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)(\sin nx + \cos nx)$.

Esercizio 8. Si consideri una successione infinita di prove indipendenti ognuna con probabilità di successo $p \in [0, 1]$. Si dimostri che se $a(k) = 2k$, allora:

(1) con probabilità 1 solo per un numero finito di k accade che, a partire dalla prova k, ci siano $a(k)$ successi consecutivi.

(2) Si provi poi che, se $b(k) = 7$, allora con probabilità 1 accade che per infiniti k, a partire dalla prova k, ci sono $b(k)$ successi consecutivi.

(3) Provare infine a migliorare i risultati precedenti, trovando delle funzioni non banali $a(k) < 2k$ e $b(k)$, con $\lim_{k\to\infty} b(k) = \infty$, per cui valgono ancora (1) e (2), rispettivamente.

Esercizio 9. Un bastoncino viene spezzato a caso in due parti e poi la parte maggiore viene ulteriormente spezzata a caso. Calcolare la probabilità che si possa formare un triangolo con i tre pezzetti ottenuti.

Si suggerisca poi una distribuzione per i punti di rottura che rappresenti il fatto che tali punti tendono a trovarsi maggiormente verso il centro. Si calcoli, nel modo più esplicito possibile, la probabilità di formare, anche in questo caso, un triangolo.

Esercizio 10. Un punto materiale di massa m si muove lungo l'asse x sotto l'azione di un campo di forze conservativo con energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2\left(k + \frac{\epsilon}{2}x^2\right),$$

ove k e ϵ sono costanti reali.

1. Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare di k e ϵ.
2. Determinare il tipo di moto al variare dell'energia totale E e disegnare i corrispondenti ritratti di fase.
3. Nei casi periodici determinare il periodo e il limite per valori dell'energia che tendono all'energia dell'equilibrio stabile.

Esercizio 11. Un sistema meccanico è formato da due punti materiali P_1 e P_2 di ugual massa che si muovono rispettivamente su una guida rettilinea orizzontale e su una guida di profilo sinusoidale posta al di sopra di essa nel piano verticale contenente la prima guida e tangente alla guida rettilinea.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.
2. Determinare gli eventuali equilibri del sistema e discuterne la stabilità in funzione dei parametri del problema.
3. Nel caso vi siano equilibri stabili, determinare le frequenze delle piccole oscillazioni.

Esercizio 12. Data la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

dimostrare che, per $\alpha > 2$:

1. A_n è definita positiva;
2. A_n^{-1} ha elementi positivi.

Dimostrare inoltre che, detto $x_i = \det(A_i)$, si ha che la successione $\{x_i\}$ soddisfa l'equazione alle differenze

$$x_{i+1} = \alpha x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \dots,$$

con le condizioni iniziali $x_0 = 1, \quad x_1 = \alpha$.

Esercizio 13. È noto che la soluzione del problema ai valori ai limiti

$$y'' = y - g(x), \quad 0 < x < 1, \qquad y(0) = 1,\ y(1) = 2,$$

con $g(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, è positiva sull'intervallo $[0, 1]$. Definire un metodo numerico alle differenze per approssimare la soluzione di questo problema, su ascisse equidistanti dell'intervallo $[0, 1]$, che preservi la positività della soluzione.

Esercizio 14. Si supponga di avere una azienda che produce due prodotti, A e B. Ciascuno di questi deve essere lavorato in 3 differenti laboratori, con i seguenti requisiti temporali per unità di prodotto:

prodotto	laboratorio 1	laboratorio 2	laboratorio 3
A	2	5	3
B	6	3	3

Sapendo che:

- i 3 laboratori lavorano, rispettivamente, al più 60, 60 e 42 ore per ciclo produttivo,
- i due prodotti garantiscono, rispettivamente, un profitto unitario di 3 e 5,

massimizzare il guadagno complessivo. Ciò premesso:

1. descrivere matematicamente il precedente problema di ottimizzazione,
2. risolvere graficamente.